力学試験問題

担当：国場敦夫

1997 年 9 月 5 日

1

外力がなく一直線上を運動するロケットを考える。時刻 t におけるロケットの質量を $m(t)$ 速さを $v(t)$ とする。単位時間に $-\frac{dm}{dt}(>0)$ の質量を相対速度 $u>0$ で後方に噴出しながら加速する。但し u は時刻によらず一定とする。

1.1

時刻 t と $t+dt$ における運動量のあいだに成立する関係式を書け。

1.2

$m=m_0$ のとき $v=v_0$ とし、 $m(t)$ と $v(t)$ の関係を求めよ。

2

３次元空間の位置 $\mathbf{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ に質量 m_i の質点 $i=1,2,3$ がいて、万有引力を及ぼしあっている３体系を考える。万有引力定数を G とし、外力はないものとして以下の問に答えよ。

2.1

運動方程式を書け。

2.2

全力学的エネルギーの表式を書け。

2.3

この系の保存量を可能な限りあげよ。ベクトルの場合は各成分の表式も与えること。

2.4

$m_1 = m_2 = m_3 = m$ とし、3つの質点が一辺の長さ a の正三角形の頂点上に相対位置を保ちつつ、その重心のまわりに一斉に角速度 ω で回転する運動が存在する。そのとき G, m, a, ω の間に成立する関係を求めよ。

3

外力のモーメントがない場合、 Euler 方程式は

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

で与えられる。

3.1

角運動量 (L_1, L_2, L_3) と回転ベクトル $(\omega_1.\omega_2, \omega_3)$ の関係を書け。

3.2

運動エネルギー $K = \frac{\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}}{2}$ と角運動量の大きさの 2 乗 $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ は保存量であることを示せ。
2.2 により (L_1^2, L_2^2, L_3^2) は3次元空間における半径 L の球と半軸長 $\sqrt{2KI_1}, \sqrt{2KI_2}, \sqrt{2KI_3}$ の楕円体の交線の座標と思える。以下 $I_1 < I_2 < I_3$ として問に答えよ。

3.3

実際の運動では

$$2KI_1 \le L^2 \le 2KI_3$$

の関係があることを示せ。

3.4

Euler 方程式のほとんど自明な解は (i)$\omega_1 = \frac{L}{I_1}, \omega_2 = \omega_3 = 0(ii)\omega_2 = \frac{L}{I_2}, \omega_3 = \omega_1 = 0(iii)\omega_3 = \frac{L}{I_3}, \omega_1 = \omega_2 = 0$ の3つある。 (i) と (iii) は安定 (ii) は不安定であることを上記の交線の描像に基づいて説明せよ。