数学 $II-1$ 試験問題（担当：渚）

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1)行列$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、A^2, A^3を求めよ。

(2)行列$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列B^{-1}を求めよ。

(3) 行列 $C = B^{-1}AB$ とおくとき、

$$C = \begin{pmatrix} -9 & -16 & -8 \\ 11 & 17 & 7 \\ -10 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

となることを確かめよ。

(4) 自然数 n に対して、C^n を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1)行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ の階数、および

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となる正則行列 P, Q を一組求めよ。

(2) $AB = 0_4$ となる階数１の行列 B を一つ求めよ。

(3) $AB = 0_4$ となる階数２の行列 B について議論せよ。

ただし 0_4 は４行４列の零行列。

$\boxed{3}$ 次の二つの行列式を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$