数学ＩＢ　クラス：理１　担当教官：山本昌宏　試験日時：２０００年２月２２日２限　試験時間：８０分　本、ノート持込不可

１．サイクロイドと呼ばれる次の平面曲線の長さを求めよ：

$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$

ただし、 a は正の定数とする。

２．心臓形と呼ばれる平面曲線の長さを求めよ：

$r = a(1 + \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$

ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan y/x$ は (x, y) の極座標とし、 a は正の定数とする。

３．級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

に関して、収束するかどうかを調べよ。さらに絶対収束するか？

４．次のべき級数について、それぞれ収束半径ならびに収束するような x の範囲を決定せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n} \qquad (2)$$

５．関数 $\exp(x \sin x)$ の原点におけるテイラー展開を x^6 まで求めよ。

６． x, y, z の関数 $u = f(r)$ を考える。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし、 Δ は (x, y, z) に関するラプラシアンとする。

(1) $\Delta u = f''(r) + 2f'(r)/r$ を証明せよ。

(2) A, k を定数とすると、 $u = A\frac{\sin kr}{r}$ は $\Delta u = -k^2 u$ を満たすことを証明せよ。

７． $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たす実数 x, y のなかで $x^2 + y^2$ を最小にするものを求めよ。