数学II試験問題　冬学期（松本） 2000年2月18日午後3:00−4:30,(761)

問題1. シュミットの直交化法を用いて, $\mathbb{R}^3$の基底

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を正規直交基底にせよ. ただし, $\mathbb{R}^3$ には標準的な内積(,)が入っているものとする: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

問題2. 次の行列 A は対角化不可能であることを証明せよ.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

問題3.

(i) ユニタリー行列とエルミート行列の定義を述べよ. ▪

(ii) ユニタリー行列による正規行列の対角化定理を用いて, 反エルミート行列 (skew-hermitian matrix) の特性根は全て純虚数 (または0) であることを証明せよ. ただし, 複素係数の $n \times n$ 行列 A が反エルミートであるとは, $A^* = -A$ がなりたつことである. (A^* は ${}^t\bar{A}$ の略記である.)

問題4. $n \times n$ 行列Aが $(A^3 - E_n)^n = O$ を満たすための必要十分条件はAの特性根がすべて1の3乗根であることである. これを証明せよ.

問題5.

(i) 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めよ. ($\alpha \in \mathbb{R}$.)

(ii) 上の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ. ▪

(iii) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ.

(以上)

注意 : 以下の事項を守らない場合、カンニングとみなされることがある。
※特に出題者からの許可がない限り、学生証、時計、及び筆記用具以外のものを机の上に置かない。
　筆入れなども鞄等にしまい、鞄は机の中、脇の椅子または床の上に置く。
※携帯電話等を時計の代わりに使用してはならない。
※教科書、参考書、ノート等は鞄等にしまう。
※解答用紙や計算用紙は所定の枚数以上に取らない。