

## 数学 II - 2 試験問題（担当：渚）

**[1]** 次の二つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

に対して

- (1)  $A, B$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2)  $A, B$  を同時に上半三角化する直行行列と、その上半三角行列を求めよ。

**[2]**  $\omega$  を 1 の 3 乗解とする（つまり  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ）。

- (1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列によって対角化せよ。また、そのユニタリ行列を求めよ。

- (2) 次の行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列によって対角化せよ。また、そのユニタリ行列を求めよ。

**[3]** 次の 2 次形式の標準形の符号数を求めよ。

- (1)  $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy + 4yz$
- (2)  $xy + xz + xu + yz + yu + zu$

**[4]** 次の正規行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{2} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

について

- (1) ユニタリ行列で対角化せよ。ユニタリ行列も求めてください。
- (2) 直行行列で

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

の形に変換せよ。直行行列も求めてください。